Г Л А В А 9

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ. ДВИЖЕНИЕ ЛИНИИ АПСИД. ВЛИЯНИЕ ТРЕТЬЕГО ТЕЛА НА ЭПОХИ МИНИМУМОВ

Д. Я. Мартынов

§ 1. Эллиптические орбиты

В общем случае, когда луч зрения наблюдателя не лежит в плоскости орбиты и орбита не круговая, момент минимума блеска не совпадает с моментом соединения. Из

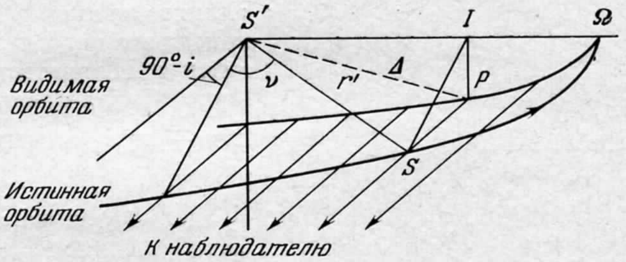

Рис. 61.

треугольника $SS'P$ на рис. 61 видно, что проекция расстояния между центрами обеих компонент

$$\Delta^2 = r'^2 - [S, P]^2.$$

Но $[S'P] = [S'I] \sin i$, $[S'I] = r' \cos \nu$ и, следовательно,

$$\Delta^2 = r'^2 (1 - \sin^2 i \cos^2 \nu).$$

Здесь ν — долгота в орбите, которую мы будем отсчитывать от верхнего соединения яркой компоненты (рис. 62). Истинная аномалия v, отсчитываемая от периастра, определится из равенства

$$v = 90^\circ + \nu - \omega$$

и тогда уравнение эллипса в полярных координатах запишется следующим образом:

$$r' = \frac{a(1-e^2)}{1-e\sin(\nu-\omega)},$$

откуда имеем

$$\Delta = \frac{a(1-e^2)}{1-e\sin(\nu-\omega)}\sqrt{1-\sin^2 i\cos^2\nu}\,.$$

Сразу находим производную этой величины:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\nu} = \sin\nu(\cos\nu\sin^2 i + e\sin\omega) + e\cos\nu\cos\omega\cos^2 i.$$

Для системы двух шаровых звезд минимум блеска будет совпадать с минимумом проецированного расстояния (у эллипсоидальных компонент это справедливо лишь приблизительно). Приравнивая производную $\frac{d\Delta}{d\nu}$ нулю и выбирая решение, при котором $\frac{d^2\Delta}{d\nu^2}$ положительно, найдем значение долготы ν_1, при которой происходит минимум блеска:

$$\operatorname{tg}\nu_1 = -\frac{e\cos\omega\cos^2 i}{\cos\nu_1\sin^2 i + e\sin\omega}. \tag{9.1}$$

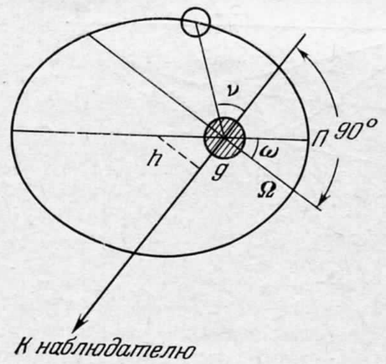

Рис. 62.

Минимум блеска будет точно совпадать с моментом соединения лишь при $i = 90°$.

Введем обозначения:

$$h = e\cos\omega, \quad g = e\sin\omega. \tag{9.2}$$

Тогда с точностью до вторых степеней эксцентриситета

$$\nu_1 = -\frac{h\cos^2 i}{g + \cos\nu_1\sin^2 i}.$$

Положив $\cos \nu_1 = 1 - \frac{1}{2}\nu_1^2$, найдем

$$\nu_1 = -h \operatorname{ctg}^2 i \left(1 - g \sec^2 i + \frac{\nu_1^2}{2}\right);$$

решив это уравнение относительно ν_1, получим

$$\nu_1 = \frac{-1 \pm [1 - h^2 \operatorname{ctg}^4 i\,(1 - g \operatorname{cosec}^2 i)]}{h \operatorname{ctg}^2 i}.$$

Из очевидных соображений выбираем знак «+» и находим окончательно

$$\nu_1 = -h \operatorname{ctg}^2 i\,(1 - g \operatorname{cosec}^2 i). \tag{9.3}$$

Для вторичного минимума подобным же образом найдем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \nu_2 &= \frac{e \cos \omega \cos^2 i}{\cos \nu_2 \sin^2 i - e \sin \omega}, \\ \nu_2 &= \pi + h \operatorname{ctg}^2 i\,(1 + g \operatorname{cosec}^2 i). \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Из формул (9.3) и (9.4) видно, что оба минимума смещены от момента соединения в сторону периастра. Впрочем, величина этого смещения крайне незначительна вследствие малости, как правило, фактора $\operatorname{ctg}^2 i$. Например, даже при $i = 65^\circ$ (что встречается крайне редко) $e = 0{,}25$, $\omega = 0$; $\nu_1 = 3^\circ{,}2$. Основная же причина, почему время от главного минимума до вторичного не равно времени от вторичного до главного, лежит в законе площадей.

Для выяснения этого вопроса введем известное из теоретической астрономии уравнение центра, связывающее истинную аномалию v со средней M (Дубошин, стр. 325):

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \ldots$$

Ограничиваясь членами второго порядка относительно эксцентриситета, обернем этот ряд:

$$M = v - 2e \sin v + \frac{3}{4} e^2 \sin 2v$$

и введем вместо истинной аномалии истинную долготу ν:

$$M = \nu + 90° - \omega - 2e\cos(\nu - \omega) - \frac{3}{4}e^2\sin 2(\nu - \omega) + \ldots$$

Если мы теперь под M будем понимать среднюю долготу, отсчитываемую от верхнего соединения, так же как и ν, то она будет отличаться от средней аномалии на угол $90° - \omega$ и поэтому

$$M = \nu - 2e\cos(\nu - \omega) - \frac{3}{4}e^2\sin 2(\nu - \omega) + \ldots$$

Введем, наконец, среднее движение в орбите n, так что $M = nT + c$, где T — время, начало отсчета которого должно быть согласовано со значением постоянной c. Для моментов T_1 и T_2 главного и вторичного минимумов будем иметь

$$nT_1 + c = \nu_1 - 2e\cos(\nu_1 - \omega) - \frac{3}{4}e^2\sin 2(\nu_1 - \omega),$$

$$nT_2 + c = \nu_2 - 2e\cos(\nu_2 - \omega) - \frac{3}{4}e^2\sin 2(\nu_2 - \omega).$$

Вычитая одно из другого, найдем

$$n(T_2 - T_1) = \pi + 2h\operatorname{ctg}^2 i + 4e\cos\omega\cos(h\operatorname{ctg}^2 i) - \\ - \frac{3}{2}e^2\cos 2\omega\sin(2h\operatorname{ctg}^2 i). \qquad (9.5)$$

Последний член — третьего порядка малости и может быть отброшен. Заменим далее n через $2\pi/P$, где P — орбитальный период, и найдем окончательно до e^2 включительно

$$(T_2 - T_1)\frac{\pi}{P} - \frac{\pi}{2} = h(1 + \operatorname{cosec}^2 i). \qquad (9.6)$$

Последняя формула дает нам так называемое смещение минимумов, т. е. данные о том, насколько промежуток времени между главным и вторичным минимумами отличается от полупериода. При $i = 90°$ формула становится особенно простой

$$T_2 - T_1 - \frac{P}{2} = 2h\frac{P}{\pi}.$$

Смещение вторичного минимума от середины между последовательными главными полностью определяется составляющей h эксцентриситета.

Проведя счет для отыскания величин Δ в том и другом минимумах, найдем

$$\Delta' = \frac{a\left(1 - e^2 + \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg}^2 i\right)\cos i}{1 + g + h^2 \operatorname{ctg}^2 i},$$

$$\Delta'' = \frac{a\left(1 - e^2 + \frac{1}{2} h^2 \operatorname{ctg}^2 i\right)\cos i}{1 - g + h^2 \operatorname{ctg}^2 i}.$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\Delta' = \frac{a\cos i}{1+g}; \qquad \Delta'' = \frac{a\cos i}{1-g},$$

или, еще проще,

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= a\cos i\,(1-g), \\ \Delta'' &= a\cos i\,(1+g). \end{aligned}\right\} \qquad (9.7)$$

При достаточно большом абсолютном значении g величина Δ' или Δ'' может стать больше суммы радиусов компонент $r_1 + r_2$ и одно из затмений не состоится, в то время как другое будет наблюдаемо. Конечно, это случится тем вернее, чем дальше отстоит i от $90°$.

Выведем, наконец, формулу, выражающую продолжительность минимумов — главного D_1 и вторичного D_2.

Поставим вопрос сначала в общем виде. Окружим звезду S' цилиндром, ось которого совпадает с лучом зрения на S', а радиус есть $\rho = r_1 + r_2$, т. е. равен сумме радиусов обеих компонент. Пока центр звезды S находится внутри этого цилиндра, диски компонент S и S' хотя бы частично перекрывают друг друга, так что продолжительность минимума определяется продолжительностью пребывания S' внутри цилиндра.

На рис. 63 показано положение компоненты S в момент конца вторичного минимума (S — яркая компонента). Согласно второму закону Кеплера время, протекшее от момента соединения до положения S, изображенного на чертеже, пропорционального площади эллиптического